[Archimet prensibi+ Monoton dizi özelliği], [$\mathbb{R}$ bağlantılıdır], [Dedekind prensibi] ve [Cauchy dizi özelliği] niteliklerinden her biri diğerini gerektiren denk nitelikler olduğundan [IV Tamlık aksiyomu] niteliği yerine bu niteliklerin herhangi biri aksiyom gibi alındığında önce kurulmuş $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi elde edilir. •

1.14 Çözümlü Problemler

(1) Teorem 1.13.20 yi ispatlayınız.

İspat: $\mathbb{R}$ içinde monoton azalan ve alttan sınırlı bir (x_n) dizisi verilsin. O halde, terimleri $y_n = -x_n,\ n \in \mathbb{N}$ biçiminde tanımlı (y_n) dizisi monoton artan ve üstten sınırlı bir dizi olduğundan Teorem 1.13.19 gereğince (y_n) dizisi yakınsaktır ve $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \sup \mathcal{R}(y_n)$ dir. Buradan

$$\lim_{n\to\infty}(-x_n) = \sup\{-x_n :\ n \in \mathbb{N}\}$$

yazabiliriz. Herhangi $E \subset \mathbb{R}$ için $\inf E = -\sup(-E)$ olduğundan son eşitliğe göre $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf \mathcal{R}(x_n)$ olduğu elde edilir. □

(2) $\mathbb{R}$ içinde yakınsak olan her dizinin bir Cauchy dizisi olduğunu ispatlayınız (Teorem 1.13.22).

İspat: (x_n) yakınsak bir dizi ve $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ olsun. Bu durumda, $\forall\epsilon \in \mathbb{R}_+$ için $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall n > n_\epsilon$ için $|x_n - a| < \epsilon/2$ olur. Böylece $\forall n, m > n_\epsilon$ için

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |a - x_m| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise, (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olması demektir. □

(3) $\mathbb{R}$ içinde her Cauchy dizisinin sınırlı bir dizi olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Herhangi bir (x_n) Cauchy dizisi verilsin. Cauchy dizisinin tanımına göre $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall n, m \geq n_1$ için $|x_n - x_m| < 1$ olur.

Buradan $m = n_1$ olmak üzere $\forall n > n_1$ için $|x_n - x_m| < 1$ veya $x_{n_1} - 1 < x_n < x_{n_1} + 1$ olduğu bulunur. $K = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}, x_{n_1} - 1\}$ ve $M = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}, x_{n_1} + 1\}$ dersek $\forall n \in \mathbb{N}$ için $K \le x_n \le M$ dir ve dolayısıyla, (x_n) dizisinin sınırlı olduğu elde edilir. $\diamond$

(4) Teorem 1.13.23 ü ispatlayınız.

İspat: (x_n) içinde bir Cauchy dizisi ve bu dizinin $a \in \mathbb{R}$ noktasına yakınsayan bir (x_{n_k}) alt dizisi verilsin. $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ olduğunu gösterelim. Herhangi bir $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ sayısı verilsin. (x_n) bir Cauchy dizisidir $\Rightarrow \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall n, m \ge n_\epsilon$ için $|x_n - x_m| < \epsilon/2$ olur. $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a \Rightarrow \exists k_1 = k_1(\epsilon) \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall k \ge k_1$ için $|x_{n_k} - a| < \epsilon/2$ olur. $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty \Rightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall k \ge k_2$ için $n_k > n_\epsilon$ olur. Bu üç sonuçtan $\forall k \ge k_\epsilon = \max(n_\epsilon, k_1, k_2)$ için

$$|x_k - a| \le |x_k - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

olduğu ve dolayısıyla, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ olduğu elde edilir. $\square$

(5) $\mathbb{R}$ içindeki her kompakt alt kümenin $\mathbb{R}$ de kapalı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: E, $\mathbb{R}$ nin herhangi kompakt bir alt kümesi olsun. $E^c = \mathbb{R} \backslash E$ nin $\mathbb{R}$ de açık bir küme olduğunu gösterelim. $a \in \mathbb{R}$ ve $a \notin E$ olduğunu farzedelim. $b \in E$ ise $0 < r < \frac{1}{2}|b - a|$ olmak üzere a ve b noktalarının $U_r(a)$ ve $U_r(b)$ komşuluklarını gözönüne alalım. E, $\mathbb{R}$ de kompakt bir alt küme olduğundan

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_r(b_i) = Y$$

olacak biçimde $\{U_r(b_i)\}_{i\in\mathbb{N}_m}$ aralıklar ailesi vardır.
$0 < r_i < \dfrac{1}{2}|b_i - a|,\ i = 1, \ldots, m$ olmak üzere

$$X = U_{r_1}(a) \cap \ldots \cap U_{r_m}(a)$$

kesişimi a nın bir açık komşuluğu olmakla beraber $X \cap Y = \emptyset$ dur. O halde, $X \subset E^c$ dir ve buradan da a noktasının E^c nin bir iç noktası olduğu elde edilir. Demek ki, E^c, $\mathbb{R}$ de açık bir kümedir. $\diamond$

(6) $\mathbb{R}$ de kompakt olan kümenin her kapalı alt kümesinin de $\mathbb{R}$ de kompakt olduğunu gösteriniz.

Çözüm: E, $\mathbb{R}$ nin kompakt bir alt kümesi ve F'de E nin $\mathbb{R}$ de kapalı bir alt kümesi olsun. $G = (G_i)_{i\in L}$, F nin bir açık örtüsü olsun. $F^c = \mathbb{R}\backslash F$ olmak üzere $Q = \{F^c,\ (G_i)_{i\in L}\}$ ailesi E nin bir açık örtüsü olduğu açıktır. E, $\mathbb{R}$ de kompakt olduğundan Q örtüsünün E kümesini ve dolayısıyla, F kümesini örten sonlu Q_0 alt örtüsü vardır. Eğer, $F^c \in Q_0$ ise $Q_0\backslash F^c$, F nin açık bir örtüsü olduğu açıktır. Böylece, G örtüsünün F kümesini örten sonlu bir alt örtüsünün varlığı elde edilmiş olur. Demek ki, F, $\mathbb{R}$ de kompakt bir kümedir. $\diamond$

(7) F, bir $E \subset \mathbb{R}$ kompakt kümesinin sonsuz alt kümesi ise, F kümesinin E içinde bir limit noktasına sahip olduğunu gösteriniz.

İspat: E, $\mathbb{R}$ de kompakt olduğundan sınırlıdır. O halde, F, $\mathbb{R}$ nin sınırlı ve sonsuz elemanlı bir alt kümesi olduğundan Bolzano-Weierstrass prensibi gereğince F nin en az bir limit noktası vardır. $E, \mathbb{R}$ de kapalı olduğundan bu limit noktası E içindedir. $\square$

(8) Teorem 1.13.30 u ispatlayınız.

İspat: **(a)** $E, \mathbb{R}$ de kapalı ve sınırlı bir küme olsun. Bu durumda, Teorem 1.13.35 in (e) şıkkı ve Problem (7) gereğince E kümesi (b) ve (c) özelliklerini sağlar.

(b) $E, \mathbb{R}$ de kompakt bir küme olsun. E nin (c) özelliğini sağladığı Problem (7) den görülür. Bu durumda, E nin (a) özelliğinide sağladığını gösterelim.

Önce, E nin sınırlı olduğunu görelim. Tersine, E sınırsız bir küme ise, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|x_n| > n$ olacak biçimde $x_n \in E$ elemanı vardır. Bu $x_n, n \in \mathbb{N}$ noktalarından oluşan

$$F = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$$

sonsuz kümesinin $\mathbb{R}$ de limit noktası yoktur. Bu ise E nin her sonsuz alt kümesinin E de bir limit noktasına sahip olması ile çelişdiğinden

E sınırlıdır. Şimdi E nin kapalı olduğunu görelim. Tersine, E nin $\mathbb{R}$ de kapalı olmadığını varsayalım. Bu durumda, E kümesinin bir limit noktası olan, fakat E ye ait olmayan bir $x_0 \in \mathbb{R}$ noktası vardır. O halde, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|x_n - x_0| < 1/n$ olacak biçimde en az bir $x_n \in E$ noktası vardır. Çünkü aksi taktirde x_0 noktasının $U_{\frac{1}{n}}(x_0)$ komşuluğunda E kümesine ait nokta bulunmaz ve x_0, E kümesinin limit noktası olmazdı.

$$S = \{x_n \in E : \ \forall n \quad \text{için} \quad |x_n - x_0| < 1/n\}$$

kümesini gözönüne alalım. S kümesinin eleman sayısı sonsuzdur. (Çünkü, S nin eleman sayısı sonlu olsaydı, $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall n \geq m_0$ için $|x_n - x_0| \geq d$, d-sabit olur ve buradan da $U_{1/m_0}(x_0) \cap E = \emptyset$ olurdu. Bu ise x_0 noktasının E kümesinin bir limit noktası olması koşuluna aykırıdır.) x_0 noktası S nin bir limit noktasıdır. Ayrıca, S nin $\mathbb{R}$ de x_0 dan farklı hiçbir limit noktası yoktur. Gerçekten, $y \in \mathbb{R}$ ve $y \neq x_0$ ise

$$\begin{aligned} |x_n - y| = |x_0 - y + x_n - x_0| &\geq |x_0 - y| - |x_n - x_0| \\ &\geq |x_0 - y| - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

olur. $|x_0 - y| > 0$ olduğundan Archimet prensibi gereğince $n_0 > 2/|x_0 - y|$ olacak biçimde $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. O halde $\forall n \geq n_0$ için

$$|x_n - y| \geq |x_0 - y| - \frac{1}{n_0} > \frac{1}{2}|x_0 - y|$$

olduğu elde edilir. Bu ise, y noktasının S nin bir limit noktası olmadığı anlamını verir. Böylece, S kümesinin E de limit noktası yoktur. Bu ise E kümesinin (c) koşulunu sağlaması ile çelişir. Bu çelişme E nin kapalı olmadığını kabul etmekle ortaya çıkmıştır. Demek ki, E kapalıdır.

Böylece, E kümesinde (c)$\Rightarrow$ (a) önermesi doğrudur. Ayrıca, (b)$\Rightarrow$ (c)$\Rightarrow$ (a) önermesinin sonucu olarak (b)$\Rightarrow$(a) önermesinin doğruluğu görülür ve sonuçta teoremin ispatı (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (a) önermesi şeklinde tamamlanmış olur. $\square$

(9) Teorem 1.13.35 de (o) ile ifade edilen önermenin doğru olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Boş olmayan ve üstten sınırlı bir $E \subset \mathbb{R}$ alt kümesi verilsin.

$$F = \{y \in \mathbb{R} : \ y, \ E \ \text{ nin üst sınırıdır}\}$$

kümesini gözönüne alalım. $a \in E$ ve $b \in F$ olsun. Archimet prensibi gereğince $\forall n \in \mathbb{N}$ sayısı için

$$0 \le \frac{b-a}{2^n} < \frac{b-a}{n} \le m$$

olacak biçimde bir $m \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Üstelik c, E nin bir üst sınırı ise tüm $y \ge c$ sayıları da E nin üst sınırlarıdır. Böylece, $a + P_n.2^{-n}$, E nin bir üst sınırı olacak biçimde bir minimal $P_n \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Bu eğer, $I_n = [a+(P_n-1)2^{-n}, \ a+P_n 2^{-n}]$ ise, $E \cap I_n$ nin boş olmadığını gösterir. $P_n 2^{-n} = (2P_n)2^{-n-1}$ olduğundan ve $a + (2P_n - 2)2^{-n-1}$ sayısı E nin bir üst sınırı olmadığından $P_{n+1} = 2P_n$ veya $P_{n+1} = 2P_n - 1$ dir. Ayrıca, $I_{n+1} \subset I_n$ dir. O halde, iç içe aralıklar prensibi gereğince $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n \ne \emptyset$ dir. $J = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ diyelim ve J nin bir tek elemandan oluştuğunu görelim. $c_1, c_2 \in J$ ve $c_1 < c_2$ olduğunu varsayalım. O halde, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $c_1, c_2 \in I_n$ olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $[c_1, c_2] \subset I_n$ olur ve buradan da

$$0 < c_2 - c_1 \le |I_n| = 2^{-n}$$

olduğu elde edilir. Öte yandan Archimet prensibi gereğince $\dfrac{1}{c_2 - c_1} < n_0$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Bu durumda, elde edilen

$$0 < c_2 - c_1 \le \frac{1}{2^{n_0}} < \frac{1}{n_0} < c_2 - c_1$$

eşitsizliği bir çelişki olduğundan varsayım yalnış olur. Böylece J nin bir noktadan oluştuğu elde edilir. Bu noktayı γ ile gösterip, $\gamma = \sup E = \inf F$ olduğunu gösterelim.

Önce γ nın E nin bir üst sınırı olduğunu gösterelim. Aksi taktirde $x_0 > \gamma$ olacak biçimde bir $x_0 \in E$ elemanı mevcut olacaktır. O zaman,

$2^{-n} < x_0 - \gamma$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı mevcut olur ve $\gamma \in I_n$ olduğundan $a + P_n.2^{-n} < x_0$ eşitsizliği doğru olacaktır. Bu ise, P_n nin tanımına ters düşer. Üstelik, $\forall y \in F$ için $y \geq \gamma$ dır. Diğer taraftan, eğer, bir $y \in F$ için $\gamma < y$ ise, $2^{-n} < y - \gamma$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı mevcut olacaktı ve $\gamma \in I_n$ olduğundan $a+(P_n-1)2^{-n} > y$ olur ve dolayısıyla, $a+(P_n-1)2^{-n}$, E nin bir üst sınırı olacaktı. Bu ise, P_n nin tanımına bir çelişkidir. Böylece, γ sayısı F nin minimal bir elemanıdır ve dolayısıyla, $\gamma = \sup E$ dir. $\diamond$

(10) Teorem 1.13.35 de (p) ile ifade edilen önermenin doğru olduğunu gösteriniz.

Çözüm: (x_n) içinde bir Cauchy dizisi olsun. Her Cauchy dizisi sınırlı olduğundan (Bkz. Problem (3)) (x_n) dizisi sınırlıdır. (x_n) dizisi üstten sınırlı olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için $\{x_k, x_{k+1}, \ldots,\}$ kümesi de üstten sınırlıdır. Terimleri

$$b_k = \sup\{x_n : \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq k \ \}$$

biçiminde tanımlı (b_k) dizisni gözönüne alalım. $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$\{x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots\} \subset \{x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots\}$$

olduğundan §1.8 deki Problem (3) e göre (b_k) monoton azalan bir dizidir. Ayrıca, (b_k) dizisi hem de alttan sınırlıdır. O halde, Teorem 1.13.20 gereğince (b_k) yakınsak bir dizidir. $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = \gamma$ olduğunu varsayıp, $\lim\limits_{n\to\infty} x_k = \gamma$ olduğunu gösterelim. Herhangi $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ sayısı verilsin. $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = \gamma \Rightarrow \exists k_1 = k_1(\epsilon) \in \mathbb{N}$, öyleki $\forall k > k_1$ için $|b_k - \gamma| < \epsilon/3$ dür. (x_k) bir Cauchy dizisidir $\Rightarrow \exists k_2 = k_2(\epsilon) \in \mathbb{N}$, öyleki $\forall k, m > k_2$ için $|x_k - x_m| < \epsilon/3$ dür. $b_k = \sup\{x_n : \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq k\} \Rightarrow k_3 = k_3(\epsilon) = \max\{k_1, k_2\}$ olmak üzere $k_4 > k_3$ ve $0 \leq b_{k_3} - x_{k_4} = |b_{k_3} - x_{k_4}| < \epsilon/3$ olacak biçimde $k_4 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Son üç sonuçu kullanırsak $\forall k > k_4$ için

$$\begin{aligned} |x_k - \gamma| &\leq |x_k - x_{k_4}| + |x_{k_4} - b_{k_3}| + |b_{k_3} - \gamma| \\ & \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon \end{aligned}$$

bulunduğundan istenen $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \gamma$ özelliği elde edilmiş olur.

Aşağıdaki Problem (11), (12) ve (13) te $\mathbb{R}$ nin tanımındaki I, II, III, (I,III) ve (II,III) aksiyomlarının sağlandığı farzedilir. $\diamond$

(11) [IV Tamlık aksiyomu] $\Leftrightarrow$ [$\mathbb{R}$ bağlantılıdır] önermesinin doğruluğunu gösteriniz.

Çözüm: Teorem 1.13.35 de (a), (d), (m) ve (n) ile ifade edilen önerme gereğince [IV Tamlık aksiyomu]$\Rightarrow$ [sup özelliği]$\Rightarrow$ [$\mathbb{R}$ bağlantılıdır]$\Rightarrow$ [Dedekind prensibi]$\Rightarrow$ [IV Tamlık aksiyomu] şeması gerçekleştiğinden istenen önermenin doğruluğu elde edilir. $\diamond$

(12) [Sup özelliği] $\Leftrightarrow$[Cauchy dizi özelliği] önermesinin doğru olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Teorem 1.13.35 de (b), (c), (e), (f), (h), (ı), (i) ve (k) ile ifade edilen önermeler gereğince [sup özelliği]$\Rightarrow$ [Archimet prensibi]+[Monoton dizi özelliği]+[Heine-Borel Prensibi]$\Rightarrow$ [Cantor Prensibi]$\Rightarrow$ [Bolzano-Weierstrass prensibi]$\Rightarrow$ [Cauchy dizi özelliği]$\Rightarrow$ [Monoton dizi özelliği]$\Rightarrow$ [sup özelliği] şeması gerçeklendiğinden istenen önermenin doğruluğu elde edilir. $\diamond$

(13) [Sup özelliği] $\Leftrightarrow$[Monoton dizi özelliği] önermesinin doğru olduğunu gösteriniz.

Çözüm: İstenen önermenin doğruluğu Problem (12) deki önermenin ispatına benzer şekilde gösterilebilir. $\diamond$

Not: Problem (11), (12) ve (13) te ifade edilen önermelerin doğruluğu doğrudan doğruya (dolaysız) da ispatlanabilir. $\bullet$

1.15 Ek Problemler

(14) Teorem 1.13.5 i ispatlayınız.

(15) Teorem 1.13.7 yi ispatlayınız.

(16) Teorem 1.13.9 u ispatlayınız.

(17) $E = \{p \in \mathbb{Q} : \ 2 < p^2 < 3 \ \}$ kümesinin $\mathbb{Q}$ de kapalı ve sınırlı olduğunu, fakat $\mathbb{Q}$ da kompakt olmadığını gösteriniz.

(18) E, $\mathbb{R}$ de kapalı F, $\mathbb{R}$ de kompakt ve $E \subset F$ ise $E \cap F$ nin $\mathbb{R}$ de kompakt olduğunu gösteriniz.

(19) $\{ \ a \leq x \leq b : \ a \in \mathbb{Q}, \ b \in \mathbb{Q}, \ x \in \mathbb{Q}\}$ kümesine rasyonel sayılar aralığı denir ve $[a, b]_{\mathbb{Q}}$ ile gösterilir.

İç içe $([a_n, b_n]_{\mathbb{Q}})$ aralıklar dizisinin kesişiminin $\mathbb{Q}$ da boş olduğunu gösteriniz.

(20) Eğer, $E \subset F \subset \mathbb{R}$ ise, $E^\circ \subset F^\circ$ olduğunu gösteriniz.

(21) Herhangi $E, \ F \subset \mathbb{R}$ alt kümeleri için $\overset{\circ}{\overline{E \cap F}} = E^\circ \cap F^\circ$ olduğunu gösteriniz.

(22) Eğer, $E \subset F \subset \mathbb{R}$ ise, $\bar{E} \subset \bar{F}$ olduğunu gösteriniz.

(23) Herhangi $E, \ F \subset \mathbb{R}$ alt kümeleri için $\overline{E \cup F} = \bar{E} \cup \bar{F}$ olduğunu gösteriniz.

(24) Eğer, E, $\mathbb{R}$ de bağlantılı bir küme ise, $E \subset F \subset \bar{E}$ koşulunu sağlayan her F kümesinin de $\mathbb{R}$ de bağlantılı olduğunu gösteriniz.

(25) E ve F, $\mathbb{R}$ de $\bar{E} \cap F \neq \emptyset$ olacak şekilde bağlantılı kümeler ise, $E \cup F$ nin $\mathbb{R}$ de bağlantılı olduğunu gösteriniz.

(26) Teorem 1.13.35 in koşulları altında [Archimet prensibi+iç içe aralıklar prensibi]$\Rightarrow$ [Cauchy dizi özelliği] önermesinin doğru olduğunu gösteriniz.

(27) [Sup özelliği] $\Leftrightarrow$ [IV Tamlık aksiyomu] önermesinin doğru olduğunu gösteriniz.